UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

TRABAJO FIN DE ESTUDIOS

Título

La enseñanza de los números negativos en Educación Primaria

Autor/es

DAVID LOZANO IBÁÑEZ

Director/es

JOSÉ LUIS ARREGUI CASAUS

Facultad

Facultad de Letras y de la Educación

Titulación

Grado en Educación Primaria

Departamento

MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN

Curso académico

2018-19

publicaciones.unirioja.es
E-mail: publicaciones@unirioja.es

TRABAJO FIN DE GRADO

La enseñanza de los números negativos en Educación Primaria

Autor: David Lozano Ibáñez

Tutor: José Luis Arregui Casaus

Grado en Educación Primaria [206G]

Facultad de Letras y de la Educación

Año académico

2018/19

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

RESUMEN

El objetivo del presente trabajo es, primero, un breve estudio del proceder habitual en la introducción del concepto y manejo de los números negativos en la Educación Primaria, y de cómo ha evolucionado dicho proceder en relación con su evolución histórica en la sociedad y la cultura humanas: su aparición, su aceptación y su legitimación. Después, basándonos en dicho estudio, abordamos una breve propuesta didáctica con la idea de facilitar la superación de los obstáculos que más habitualmente se identifican en ambos procesos, el histórico y el didáctico. Esta propuesta se lleva a la práctica mediante actividades lúdicas y también teóricas. El resultado de este método es que ayuda a los alumnos del último curso de primaria a comprender las operaciones con números enteros y que posteriormente esta metodología les ayudará a comprender de manera más sencilla operaciones con números reales. La historia de los números negativos nos sirve para contrastar la dificultad que tuvieron nuestros antepasados para entender y posteriormente legitimizar éstos.

PALABRAS CLAVE

Números enteros, historia de los números negativos, educación primaria,

ABSTRACT

The objective of this work is to offer a brief study of the usual procedure in the introduction of the concept and management of negative numbers in Primary Education, and how that procedure has developed in relation to its historical evolution in human society and culture: its appearance, its acceptance and its legitimation. Then, based on this study, we deal with a brief didactic design to facilitate the overcoming of the obstacles that are most commonly identified in both the historical and didactic processes. This proposal is carried out through playful and also theoretical activities. The result of this method is that it helps the pupils of the last year of primary school to understand the operations with whole numbers and that later this methodology will help them to understand more easily operations with rational and complex numbers. The history of negative numbers helps us to contrast the difficulty our ancestors had to understand and subsequently legitimize them.

KEYWORDS

Integers, history of negative numbers, elementary school.

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN

Los números negativos se introducen en Educación Primaria completando a los números naturales (junto con el 0) para formar los números enteros. Los números naturales son un concepto que tienen bien interiorizado desde la educación infantil.

1.1 Introducción de números naturales y enteros en Educación Primaria

Los números constituyen el primer contacto que los niños tienen con las matemáticas, porque les dan la primera medida de las cosas que les importan en su vida diaria. Es importante su concepción desde edades tempranas dada la importancia del número a lo largo de la historia en la cultura y la sociedad.

La idea más básica de número es algo que los alumnos de Educación Primaria Infantil ya tienen naturalizado, es decir, asocian un número a su nombre de manera espontánea: uno, dos, tres, cuatro, diez, setenta, como un objeto más de su entorno. (Chamorro, 2003). Por tanto los alumnos vienen de la Educación Infantil sabiendo qué son los números pero no será hasta los primeros cursos de Primaria cuando no refuercen éstos.

Desde nuestra infancia, construimos una noción intuitiva de los primeros números y asociamos involuntariamente éstos a magnitudes y no como un ente abstracto. Desde el punto de vista docente, en el proceso de enseñanza, no podemos servirnos solamente de la definición matemática de número natural y de las reglas del algoritmo de contar, necesitamos diseñar unas situaciones que permita a los alumnos encontrar las razones de ser del número y la numeración, es decir, construir situaciones donde la utilización de estos números tengan una función y significado. (Chamorro, 2003).

El proceso histórico de legitimación de los números negativos culminó con la definición axiomática de los números naturales (Peano) y la definición de los números enteros a partir de ellos dentro de la construcción de un sistema numérico formal. Por contra pese a que la construcción formal ha tenido algunas épocas de protagonismo, la forma mas habitual de enseñanza de los números enteros en la enseñanza Primaria se basa en la presentación de contextos de la vida cotidiana. los dos ejemplos más utilizados son, por un lado, el de la temperatura, explicando que el termómetro puede marcar positivo y negativo en relación a una temperatura especial a la que llamamos 0 grados, y por otro el de operar con dinero y medir nuestra riqueza, con dos situaciones posibles: tener o deber dinero. Con este segundo ejemplo es con el que más se ha trabajado en Primaria, en relación a una cuestión que se encuentran constantemente en su día a día.

Como dice González, J.L. (1990) ‘‘las operaciones con números enteros no tienen un significado concreto e intuitivo en cada contexto. Multiplicar temperaturas no tiene sentido, restar deudas tampoco, y si la resta ocasiona problemas, con la multiplicación las cosas se complican aún más. Los números enteros surgen realmente por una necesidad matemática relacionada con el trabajo y la reflexión sobre los objetos matemáticos. La constitución y aceptación de los números negativos se debe a los problemas matemáticos que resuelve, ya que permiten establecer métodos generales para la resolución de ecuaciones, convierten la operación de restar en una ley interna y son un instrumento eficaz para describir relaciones geométricas. Al considerar a Z como materia de enseñanza, no se pueden dejar atrás estos problemas. No se trata de seguir los pasos de la historia, sino de plantear situaciones problemáticas dentro del conocimiento matemático, que dejen patente la insuficiencia del conjunto de los números naturales y den pie a la constitución del conjunto de números enteros. Una de las dificultades en la aceptación de estos números, fue la falta de un significado concreto’’ Se trata de obstáculo histórico que más adelante tendremos en cuenta.

Un planteamiento didáctico correcto de los números enteros y de las operaciones con ellos y con racionales y reales, como vías de acceso al álgebra y la geometría, es básico para el estudio posterior en niveles superiores, empezando por la Educación Secundaria.

La ampliación de la idea de número para incluir a los negativos debe ir de la mano de la ampliación del significado y campo de actuación de las operaciones aritméticas. No resulta complicado entender una suma como (-2) + 4, los estudiantes entienden pronto que si se encuentran en una recta en el punto -2 y recorren cuatro lugares, llegarán al +2. Pero es más complicado comprender expresiones del tipo 3 – (-4) si ello significa desplazarse -4 lugares. Y, en ese sentido, aún parece más difícil explicar y entender que (-3) multiplicado por (-4) es igual a 12.

2. OBJETIVOS

El *objetivo general* del presente trabajo es el siguiente:

Identificar el principal obstáculo histórico para poder desarrollar la metodología del trabajo, conocer y resumir el proceder habitual en la enseñanza de los obstáculos, proponer una metodología que dé respuesta a estos obstáculos , exponer las dificultades históricas en el desarrollo de los números negativos de las matemáticas y resumir cual ha sido la repercusión de esas dificultades en la enseñanza básica incidiendo de manera especial las directrices que marcan en los planes de estudio actuales

El *objetivo específico* en relación a los objetivos generales es:

Concretar distintas actividades de aula que permitan a los estudiantes de los últimos cursos de Educación Primaria la asimilación, primero del significado de numero negativo, y la revisión de los conocimientos que ya tienen sobre las operaciones (suma, resta, multiplicación) con los números naturales, para ampliar la interpretación de las mismas de forma que puedan aplicarlas a todos los números enteros (y posteriormente a números, racionales, reales y complejos)

3. MARCO TEÓRICO

3.1 Evolución histórica de los números negativos

Para llevar a cabo este apartado se ha tomado el libro NÚMEROS ENTEROS de la editorial Síntesis y las explicaciones del tutor.

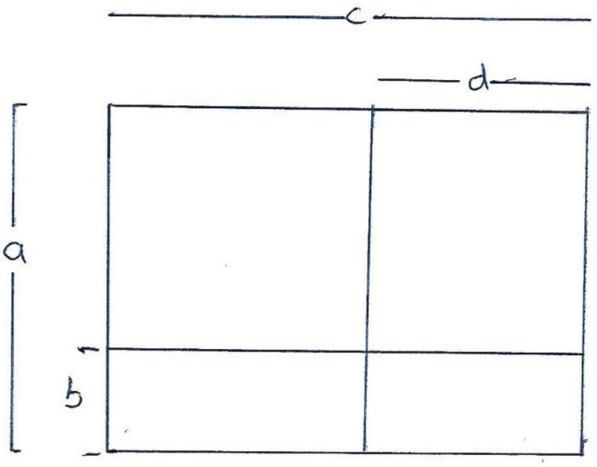
Históricamente, al igual que en el proceso de aprendizaje en la escuela la aparición de los números negativos fue mucho más tardía que la de los números naturales y fraccionarios. Pasó mucho tiempo hasta que fueron admitidos como números, y ya finalmente, a finales del s. XIX, legitimados y dotados de fundamento teórico dentro de los sistemas numéricos, definiendo con rigor los números naturales, y a partir de ellos los enteros, como su ampliación y como subconjunto de los racionales, reales y complejos.

Las matemáticas de la antigua Grecia no precisaron de los números negativos. Hasta la época pitagórica se identificaba número con magnitud: todo en la naturaleza podía ser medido por un número, o bien natural o bien una razón de números naturales. La conmoción conceptual en ese momento fue el descubrimiento por los pitagóricos de las magnitudes irracionales.

Durante el periodo alejandrino, que se inició en el año 300 a.C, hay que destacar a Diofanto al que se considera el creador del álgebra al introducir una notación abreviada para las potencias y las cantidades desconocidas, y porque introdujo la resolución de las ecuaciones algebraicas sin recurrir a la geometría. Diofanto conocía la identidad algebraica:

$(a - b)(c - d) = ac - bc - ad + bd$.

Sin embargo esto no significa que conociese los números negativos, pues esta regla se refiere al producto de diferencias y siempre que $a > b$ y $c > d$, y no al producto de números negativos como entidades aisladas.



Hay que notar que el concepto de restar es tan antiguo como el de sumar, y cuando algunos conocimientos matemáticos antiguos se expresan con símbolos modernos aparece el signo menos (‘–’), que sugiere la idea de número negativo aunque esta estuviera aún muy lejana.

Es en la civilización hindú cuando se produce la invención de los negativos. Es discutido si los matemáticos chinos tenían conocimiento de ellos, puesto que nos legaron cálculos con magnitudes numéricas de doble sentido, utilizando varillas negras para las deudas y rojas para los haberes. En nuestra opinión, decir que eso significa que usaban números negativos equivale a considerar que estos pueden existir sin el número cero, y es comúnmente aceptado que el número cero es una invención hindú. Podemos argumentar que aquellos matemáticos chinos usaban los mismos números (los naturales) para dos situaciones distintas y opuestas, y cada situación la representaban con un color diferente, y no un sistema numérico ampliado (los enteros) para fundir en una, ambas situaciones, sistema que debería incluir el cero.

Sea como sea, la primera vez documentada que aparecen las reglas de las operaciones con los números negativos de forma explícita es en el año 628, por el matemático hindú Brahmagupta.

Las matemáticas de la civilización árabe (decisiva a la postre por su influencia posterior en la Europa cristiana), pese a que consistieron en una síntesis de las tradiciones griega e hindú, no llegaron a aceptar a los números negativos. La no consideración de las raíces negativas proviene en el fondo de la identificación que hacían, al igual que los griegos, entre número y magnitud. La figura central es Al-Kwarizmi, nombre del que deriva el término ‘algoritmo’.

Durante la época medieval europea se produce una época de decadencia matemática, y la influencia musulmana tardó en dar sus frutos: hubo una lucha entre algoristas y abacistas que tuvo su connotación de intolerancia religiosa y que no se zanjó hasta el siglo XVI, cuando los matemáticos adoptaron el sistema de numeración arábigo y el método de los algoristas para sus cálculos. El matemático más destacado de la época fue Fibonacci. En cuanto a los números negativos, continúa la tradición árabe de no aceptar las raíces negativas de una ecuación, posiblemente porque no las consideraba significativas.

En el Renacimiento aparecen de nuevos los negativos, el mismo término negativo viene de esta época, ya que eran rechazadas las soluciones de una ecuación que no pudieran entenderse como una magnitud. Después de que François Viète introdujera símbolos para coeficientes e incógnitas de ecuaciones polinómicas, fue el flamenco S. Stevin el que primero aceptó por fin los negativos como raíces o coeficientes.

En cualquier caso como señala Jimeno, se mantenía en el siglo XVII el rechazo hacia los negativos porque no se aceptaban como una cantidad. Eso no quita para que Newton, por ejemplo observara que si P es un punto que en una recta marca el 4, otro punto Q a la misma distancia que P respecto del origen pero en sentido opuesto debe marcar el -4.

El siglo XVII se caracterizó por la aparición de libros de texto, que hoy en día nos permite a nosotros apreciar los conflictos en la concepción de los números negativos que se daban incluso en los s. XVIII y XIX, por los rodeos que dan, incluso los mejores matemáticos, cuando quieren explicar cuestiones elementales. En el siglo XVIII se fue aceptando la existencia de los negativos como números en determinados contextos, como reflejaban D’ Alambert, Carnot o Euler. McLaurin reconoció la distinción entre un cero relativo y un cero absoluta como clave para explicar los aspectos fundamentales de la operación con números enteros. La mayor dificultad consistía en explicar la regla de los signos, lo que el mismo Euler intentó a partir de la conmutatividad de la multiplicación. Tambien Laplace y Cauchy trataron de dar una explicación completa. Cauchy distinguía el término número referido a los reales positivos del término cantidad como alusión a los números con signo.

En la misma sociedad matemática estas dificultades contribuyeron a apreciar la necesidad de una fundamentación rigurosa de la idea de número y de función. No tuvo tanta importancia como otros hitos: los más importantes fueron el desarrollo de las ciencias gracias al Cálculo Infinitesimal y las controversias en aceptar o no las pruebas y soluciones de muchos problemas que aparecían. Se abandonaba la idea de "razón natural" para justificar algunos argumentos y se asumió progresivamente que las matemáticas son una creación humana cuyas afirmaciones precisan de bases sólidas y argumentaciones rigurosas.

Como dice Jimeno, M. (1990) fue Hermann Kankel en 1867 quien aludió por primera vez el ''principio de permanencia'' para legitimar el papel de los números negativos en los sistemas numéricos. Las reglas de las operaciones con números naturales se extienden a todos los demás números, aunque al principio solo se aceptaba un resultado si se trataba de un número "normal".

El proceso de legitimación condujo básicamente a dos líneas de presentación de los números enteros con reflejo en la enseñanza: como extensión del número cardinal y como extensión del número ordinal:

- Como extensión del número cardinal. El término de número entero aparece en este contexto, entendido como un par de números naturales en el que el primero significa añadir y el segundo quitar. Esta formalización de los números enteros llegó a hacerse habitual en los planes de estudio de la EGB de los años 70.
- Como extensión del número ordinal. Se basa en la idea de cero como origen relativo a partir del cual se sitúan, en la recta numérica, a un lado los números positivos y al otro los negativos. Dos números opuestos están a la misma distancia del origen uno a cada lado.

3.2 Evolución histórica de la didáctica de los números negativos en España

Según Maz, A. y Rico, L. (2004) han estudiado la concepción que se tenía en España durante los siglos XVII y XIX de los números enteros y su tratamiento didáctico, comenzando por los jesuitas. Hay que recordar el papel casi exclusivo que llego a tener la Compañía de Jesús como protagonista de la educación en aquellos siglos:

Los negativos, considerados como menos que nada no se aceptan como solución de una operación pero se les reconoce una existencia matemática para operar con ellos.

Su forma de enseñanza tenía un carácter tradicional pero a la hora de enseñar las matemáticas adoptaron el modelo europeo por influencia de autores como Euler, D'Alambert o Descartes.

Según Maz, A. (2005) ''durante el periodo Ilustrado en España (1768 – 1814) afirmaban en un libro de texto que una cantidad no es ni positiva ni negativa sino que tiene que tener una relación a unas circunstancias que se consideren. (…) Se utilizan expresiones tales como ahorrar, rentas, empeñar, gastar, para expresar que una situación es contraria a otra y para ello son utilizados los negativos. Así los números negativos dejan de ser absurdos y el valor -2 tiene sentido propio. Se muestra la regla de los signos y se trata justificar, pero para la adición continúa con la anulación – compensación, ya que en el caso de la suma no hay necesidad de justificar una nueva regla''.

Más adelante prosigue: ''durante el periodo Romántico en España (1815 – 1874) los números negativos se asumen y tratan como números pero se toman de forma aislada y en interacción con otros, tanto positivos como negativos. Su aparición se debe a la ampliación del campo de aplicación de una operación aritmética al campo algebraico, esto hace que estén determinados por su carácter sustractivo. Los negativos son considerados un conjunto numérico ordenado bajo la misma relación de orden que los números naturales. Intervienen en operaciones aritméticas, algebraicas y físicas. Por tanto las respuestas negativas de un problema son estudiadas en relación al enunciado de éste y solo serán rechazadas si tienen inconsistencias de tipo lógico''.

Por último: ''durante el periodo de la Restauración en España (1875 – 1902) los números negativos surgen de la una ampliación de una serie de números naturales en una sustracción sucesiva de una unidad a cero. En esta época se considera al número como una relación o como un cardinal, resultado de la acción de contar, por tanto, García de Galdeano considera que las operaciones aritméticas generan en ocasiones valores negativos, sin embargo las operaciones algebraicas tienen un sentido diferente. Finalmente, se incorpora el principio de permanencia de las leyes formales de Hankel''.

En todas las diversas etapas a lo largo del siglo XX, a modo de resumen, las distintas visiones didácticas han tratado de aproximar a los alumnos a un concepto formal de número entero(en sus distintas versiones) pese a las complicaciones que ello conlleva especialmente en Educación Primaria partiendo de construcciones que tengan un soporte intuitivo

Según Ortiz, A. (1990) estas versiones serían básicamente tres; como simetrización del semigrupo de los números naturales, como pares ordenados como operadores, como objeto matemático construido axiomáticamente. Las tres se fundamentan en la teoría de conjuntos y en las estructuras algebraicas vistas anteriormente, predominando como método de razonamiento el método deductivo. En el currículum actual hay que tener una visión didáctica de cómo llegar al concepto formal de número entero, aunque sea una meta complicada con los alumnos de Educación Primaria, a partir de una construcción con soporte intuitivo.

En opinión de Sanz, E. (1990) un programa docente correcto debe ser ambicioso en su intento de condicionar los progresos del alumno a partir del fomento de la creatividad no solo hay que desarrollar las habilidades simbólicas y de abstracción para saber resolver problemas, también tratar despertar el gusto por hacerlo y la capacidad de plantear por si mismo nuevas situaciones que le permitirán apreciar de verdad la utilidad por las matemáticas.

3.2.1 Obstáculos en la didáctica de los números negativos.

En primer lugar el término epistemología es definido por la RAE en dos acepciones:

1. Teoría de los fundamentos y métodos del conocimiento científico,
2. Parte de la filosofía que estudia los fundamentos del conocimiento científico en general

Glaeser, Duroux y Brousseau trataron de esclarecer las dificultades en la didáctica de los números negativos en relación con los obstáculos epistemológicos que han sido necesarios superar a lo largo de más de mil años de historia. Eva Cid desarrolló su punto de vista en varios artículos que culminaron en su tesis doctoral. Enumera los siguientes obstáculos:

- La actitud ha sido una barrera a la hora de manipular cantidades negativas, ya que sería necesario operar con la regla de los signos y por ello no acepta la existencia de números negativos aislados.

- No poder dar sentido a cantidades negativas aisladas, es decir, son conscientes de que las ecuaciones tienen soluciones negativas pero no pueden aceptarlas dado que no son cantidades reales y las justifican como ficticias.
- Dificultad para representar en la recta real, es decir, diferenciaban los positivos por un lado y lo contrario eran los negativos que se encontraban en otro lado. Por tanto positivos y negativos se encuentran en lugares opuestos.
- A lo largo de la historia, como indica Glaeser, ha habido dos concepciones del número cero. Una de ellas es la de un cero que significa ausencia de cantidad, es decir, una magnitud. El otro cero significaba algo relativo, un origen.
- Se produce un estancamiento en el estadio de las operaciones concretas dado que se puede justificar los negativos como algo aditivo pero no como algo multiplicativo.
- El objetivo de los matemáticos es establecer un modelo que justifique tanto la suma como el producto de los números enteros. Pero hoy en día sigue siendo alta la dificultad de tratar el producto de números negativos y son muchas las investigaciones que se llevan a cabo para intentar solucionarlo.

Citando a Brousseau en Cid, E. (2016) se dice ‘‘la noción de obstáculo epistemológico puede ser entendida como un conocimiento y no como una dificultad o falta de conocimiento que produce respuestas adaptadas a un contexto y que fuera de éste produce respuestas falsas’’.

El uso de positivo o negativo se hizo general en el comercio según recibiéramos una cantidad o fuese al contrario. La atribución de este carácter relativo a la idea de número fue clave en la superación de algunos obstáculos. Hasta que no dejó de considerarse diferentes positivos y negativos, no se llegó a un correcto entendimiento de éstos como decía Duroux.

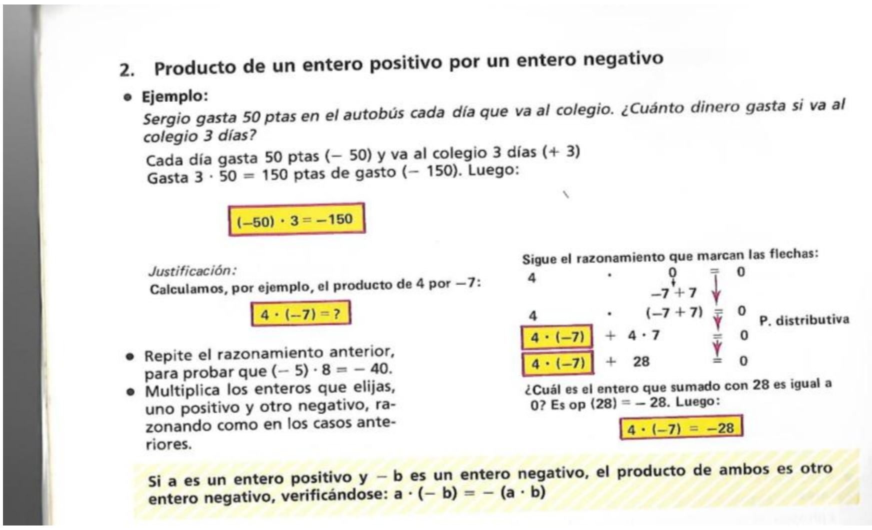
Según Sanz, E. (1990) la superación de los obstáculos tiene que darse a lo largo de todas las etapas de la educación en particular identifica el manejo del orden lineal como un obstáculo que debido a las deficiencias habituales en Educación Secundaria arrastran los estudiantes hasta la Universidad. Muchos alumnos nuevos se sienten muy inseguros si tienen que resolver problemas con inecuaciones $(A(x)<B(x))$ que no son apenas más complicadas que ecuaciones similares $(A(x)=B(x))$, pero en Secundaria no les han enseñado.

3.3 El número entero en los currículos recientes en España

Hasta mediados de los años 80 del pasado siglo la corriente formalista que se plasmó en los planes de estudio bajo el nombre común de ‘‘matemática moderna’’ se reflejó en la enseñanza de los números enteros como el conjunto de pares de números naturales módulo una relación de equivalencia, siguiendo la legitimación del número entero como extensión del número cardinal. La crítica más obvia a este planteamiento es que da más importancia al modelo que justifica con rigor una idea intuitiva de número entero que a la idea intuitiva en sí que es lo que hay que enseñar a un niño en la Educación Primaria. Desde mediados de los años 80 se ha abandonado progresivamente esta tendencia fomentando la presentación de los números enteros en su aspecto ordinal, para completar la recta numérica a partir de los naturales. Vamos a comparar dos textos como ejemplo ilustrativo de cómo abordan a partir de ese momento los libros de texto en España la introducción de los números enteros.

El primero de ellos (‘‘PITÁGORAS 7 MATEMÁTICAS’’ de la editorial SM de 1984) corresponde al 7º curso de la todavía entonces imperante EGB correspondiente con 1º de la ESO de hoy en día. Los números enteros se tratan en los tres primeros temas. En un ejemplo dice que el señor Arilla ha tenido un abono en el banco de 100000 pesetas y un adeudo de 108.070 pesetas. Resulta que su deuda es de 8.070 pesetas. Otros ejemplos similares aluden al nivel del mar, a la temperatura o a las fechas antes o después de Cristo En el primer tema una situación así no se simboliza aún mediante un número negativo pero en cambio se introduce la noción de número absoluto.

En el segundo tema se tratan ya de adición y sustracción de números enteros. Se explican las propiedades de números enteros y se introducen los problemas de operaciones con paréntesis. Por último en el tercer tema se abordan el producto y el cociente de números enteros, tratando de que el alumno asimile progresivamente la regla de los signos. En las siguientes figuras ilustramos algunos ejercicios como ejemplo (3.3.1 y 3.3.2)



2. Producto de un entero positivo por un entero negativo

- **Ejemplo:**

Sergio gasta 50 ptas en el autobús cada día que va al colegio. ¿Cuánto dinero gasta si va al colegio 3 días?

Cada día gasta 50 ptas (− 50) y va al colegio 3 días (+ 3)
Gasta 3 · 50 = 150 ptas de gasto (− 150). Luego:

$\boxed{(-50) \cdot 3 = -150}$

Justificación:
Calculamos, por ejemplo, el producto de 4 por −7:

$\boxed{4 \cdot (-7) = ?}$

Sigue el razonamiento que marcan las flechas:

$$\begin{array}{lcll} 4 & \cdot & \underset{-7+7}{0} & = 0 \\ 4 & \cdot & (-7+7) & = 0 \quad \text{P. distributiva} \\ \boxed{4 \cdot (-7)} & + & 4 \cdot 7 & = 0 \\ \boxed{4 \cdot (-7)} & + & 28 & = 0 \end{array}$$

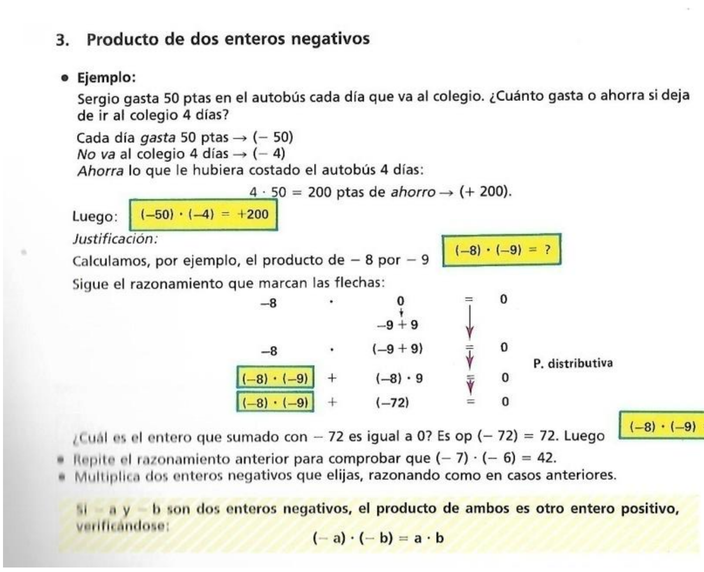
¿Cuál es el entero que sumado con 28 es igual a 0? Es op (28) = − 28. Luego:

$\boxed{4 \cdot (-7) = -28}$

- Repite el razonamiento anterior, para probar que (− 5) · 8 = − 40.
- Multiplica los enteros que elijas, uno positivo y otro negativo, razonando como en los casos anteriores.

Si a es un entero positivo y − b es un entero negativo, el producto de ambos es otro entero negativo, verificándose: a · (− b) = − (a · b)

Figura 3.3.1. Extraída del libro de texto ‘‘Pitágoras’’ de Editorial SM (pp. 28)



3. Producto de dos enteros negativos

- **Ejemplo:**

Sergio gasta 50 ptas en el autobús cada día que va al colegio. ¿Cuánto gasta o ahorra si deja de ir al colegio 4 días?

Cada día *gasta* 50 ptas → (− 50)
No va al colegio 4 días → (− 4)
Ahorra lo que le hubiera costado el autobús 4 días:
4 · 50 = 200 ptas de *ahorro* → (+ 200).

Luego: $\boxed{(-50) \cdot (-4) = +200}$

Justificación:
Calculamos, por ejemplo, el producto de − 8 por − 9 $\boxed{(-8) \cdot (-9) = ?}$

Sigue el razonamiento que marcan las flechas:

$$\begin{array}{lcll} -8 & \cdot & \underset{-9+9}{0} & = 0 \\ -8 & \cdot & (-9+9) & = 0 \quad \text{P. distributiva} \\ \boxed{(-8) \cdot (-9)} & + & (-8) \cdot 9 & = 0 \\ \boxed{(-8) \cdot (-9)} & + & (-72) & = 0 \end{array}$$

¿Cuál es el entero que sumado con − 72 es igual a 0? Es op (− 72) = 72. Luego $\boxed{(-8) \cdot (-9) = 72}$

- Repite el razonamiento anterior para comprobar que (− 7) · (− 6) = 42.
- Multiplica dos enteros negativos que elijas, razonando como en casos anteriores.

Si − a y − b son dos enteros negativos, el producto de ambos es otro entero positivo, verificándose:

(− a) · (− b) = a · b

Figura 3.3.2. Extraída del libro de texto ‘‘Pitágoras’’ de Editorial SM (pp. 29)

5. Propiedades del producto de números enteros

Hemos llegado a calcular el producto de *dos* números enteros en todos los casos. Para ello, hemos supuesto que este producto cumplía las propiedades de los números naturales.

Vamos a *comprobar* que el producto hallado cumple, efectivamente, estas propiedades.

- Calcula los productos siguientes. (Recuerda que el paréntesis significa que hay que realizar en primer lugar las operaciones indicadas dentro de él):

$$\boxed{\underbrace{[3 \cdot (-7)]}_{(-21)} \cdot (-5)} \qquad\qquad \boxed{3 \cdot \underbrace{[(-7) \cdot (-5)]}_{35}}$$

$$(-21) \cdot (-5) = 105 \longleftrightarrow 105 = 3 \cdot 35$$

Luego: $\boxed{[3 \cdot (-7)] \cdot (-5) = 3 \cdot [(-7) \cdot (-5)]}$

Comprueba que: $[(-6) \cdot (-4)] \cdot (-2) = (-6) \cdot [(-4) \cdot (-2)]$

Elige tres números enteros y comprueba que su producto es independiente del modo de agruparlos.

Figura 3.3.3. Extraída del libro de texto ''Pitágoras'' de Editorial SM (pp. 31)

Propiedad asociativa o de agrupación

Si *a*, *b* y *c* son números enteros se cumple:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Podemos, por tanto, quitar los paréntesis y escribir:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$$

- Observa:

Producto	*Signo*	*Valor absoluto*	
$4 \cdot (-5)$	$-$	$4 \cdot 5$	$\Rightarrow 4 \cdot (-5) = (-5) \cdot 4 = -20$
$(-5) \cdot 4$	$-$	$5 \cdot 4$	
$(-8) \cdot (-3)$	$+$	$8 \cdot 3$	$\Rightarrow (-8) \cdot (-3) = (-3) \cdot (-8) = 24$
$(-3) \cdot (-8)$	$+$	$3 \cdot 8$	

Elige dos enteros cualesquiera *a* y *b* y comprueba que $a \cdot b = b \cdot a$

Propiedad conmutativa o de orden

Si *a* y *b* son números enteros, se cumple:

$$a \cdot b = b \cdot a$$

- Calcula:

$(-14) \cdot \boxed{1} = -14$; $218 \cdot \boxed{1} = 218$; $(-1523) \cdot \boxed{1} = -1523$, ...

Existencia de elemento unidad

Si *a* es un número entero:

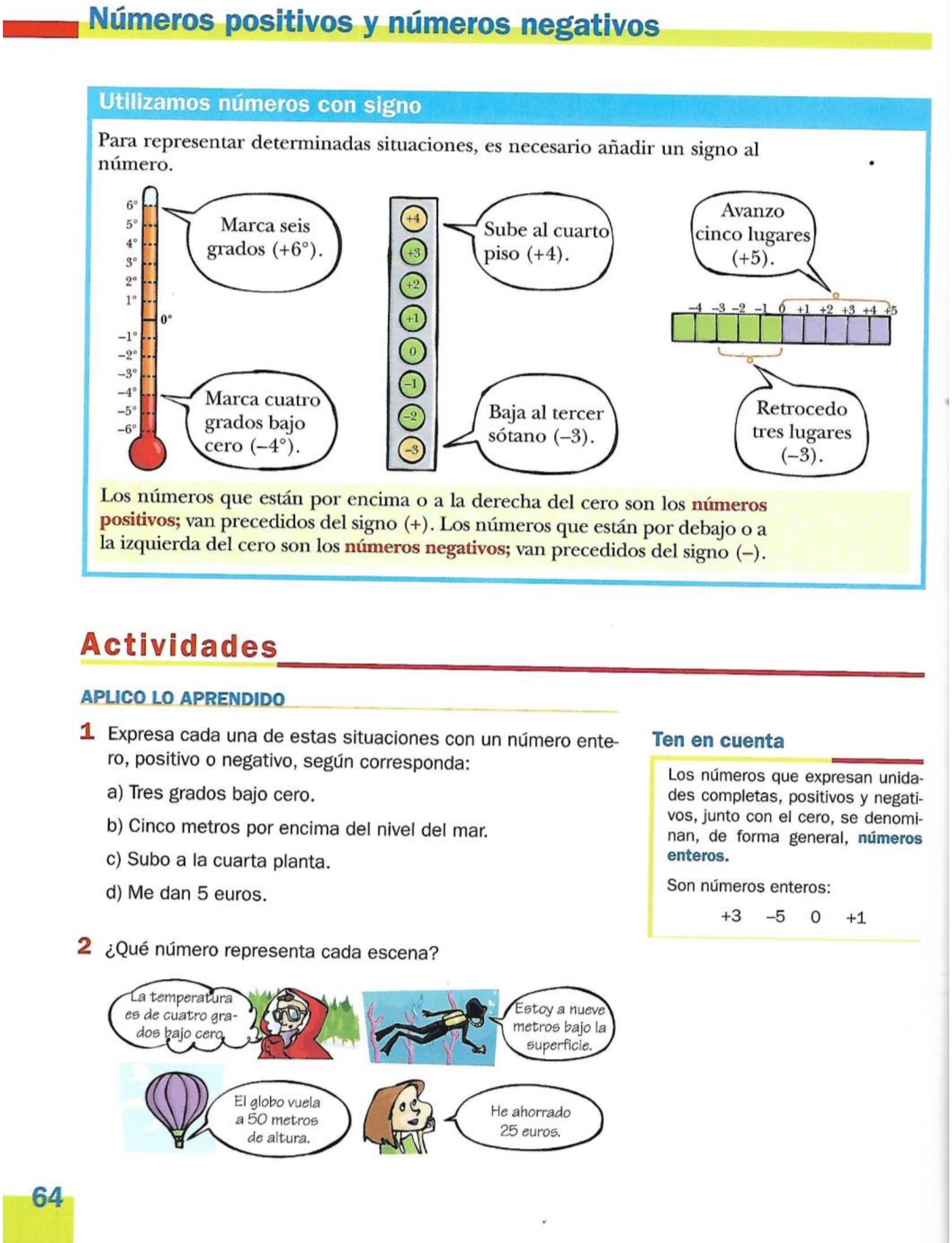
$$a \cdot 1 = a$$

Figura 3.3.4. Extraída del libro de texto ''Pitágoras'' de Editorial SM (pp. 31)

Al final de la presentación se tratan brevemente las potencias combinando con ejercicios de cociente de potencias de la misma base. Se recoge en el anexo 1 el índice completo del libro.

Posteriormente explica las propiedades (figuras 3.3.3 y 3.3.4), explicando cómo proceder con los paréntesis. Después hace una breve introducción al cociente de números enteros con operaciones sencillas. Tras esto explica qué pasaría si un número negativo es elevado a una potencia par o impar. Para terminar realizando el cociente de potencias de la misma base.

En el libro de 6º de Primaria de la Editorial Anaya de título ‘‘MATEMÁTICAS’’ se presenta la introducción de los números enteros en el tema 5 titulado ‘‘números positivos y negativos’’ (Véase el Anexo 2 donde está el índice). Se introducen a través de ejemplos clásicos, como la temperatura y el ascensor. La recta numérica aparece ya como un apoyo visual y podemos encontrar ejercicios de deudas. La adicción se enseña sumando primero números del mismo signo: (‘‘El termómetro marcaba -2º y la temperatura descendió 4º más’’) Por último se tratan las sumas con números de distinto signo. Como se puede observar en la figura 3.3.5 se presentan los números enteros mediante dichos ejemplos y a continuación encontramos varios ejercicios para la puesta en práctica. En la figura 3.3.6 se observa la recta numérica que va a servir de ayuda a lo largo del tema. A continuación se puede observar en la figura 3.3.7 la adición de números enteros y más ejercicios para su práctica. Finaliza el tema con otro apartado de adición con números de distinto signo, además propone varios ejercicios para la práctica de la adición con números enteros.



Números positivos y números negativos

Utilizamos números con signo

Para representar determinadas situaciones, es necesario añadir un signo al número.

6° 5° 4° 3° 2° 1° 0° –1° –2° –3° –4° –5° –6°

Marca seis grados (+6°).

Marca cuatro grados bajo cero (–4°).

Sube al cuarto piso (+4).

Baja al tercer sótano (–3).

Avanzo cinco lugares (+5).

–4 –3 –2 –1 0 +1 +2 +3 +4 +5

Retrocedo tres lugares (–3).

Los números que están por encima o a la derecha del cero son los **números positivos;** van precedidos del signo (+). Los números que están por debajo o a la izquierda del cero son los **números negativos;** van precedidos del signo (–).

Actividades

APLICO LO APRENDIDO

1 Expresa cada una de estas situaciones con un número entero, positivo o negativo, según corresponda:

a) Tres grados bajo cero.

b) Cinco metros por encima del nivel del mar.

c) Subo a la cuarta planta.

d) Me dan 5 euros.

2 ¿Qué número representa cada escena?

La temperatura es de cuatro grados bajo cero.

Estoy a nueve metros bajo la superficie.

El globo vuela a 50 metros de altura.

He ahorrado 25 euros.

Ten en cuenta

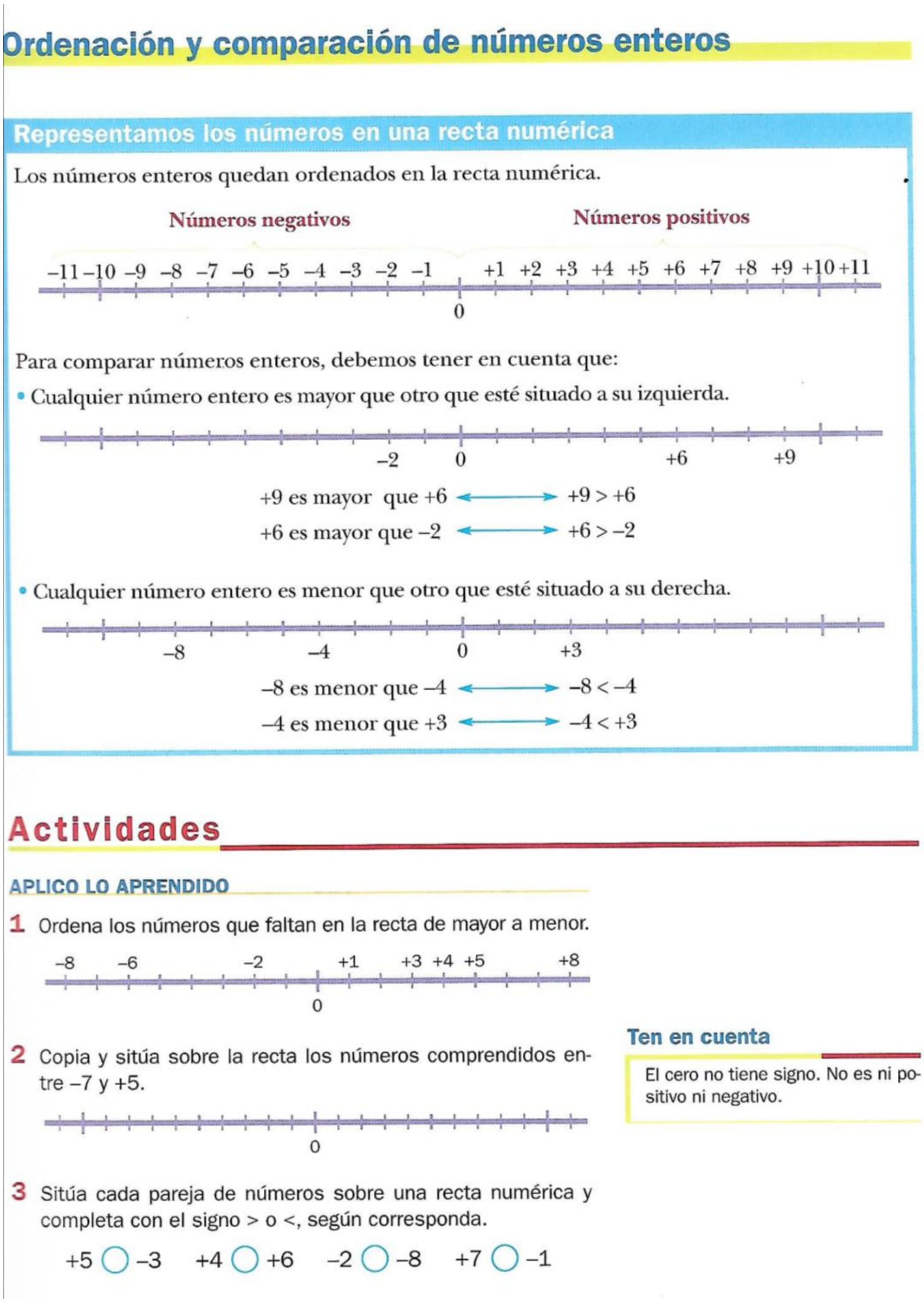
Los números que expresan unidades completas, positivos y negativos, junto con el cero, se denominan, de forma general, **números enteros.**

Son números enteros:

+3 –5 0 +1

64

Figura 3.3.5. Libro de ''Matemáticas'' de la editorial Anaya de 2009 (pp. 64)



Ordenación y comparación de números enteros

Representamos los números en una recta numérica

Los números enteros quedan ordenados en la recta numérica.

Números negativos   Números positivos

–11 –10 –9 –8 –7 –6 –5 –4 –3 –2 –1 0 +1 +2 +3 +4 +5 +6 +7 +8 +9 +10 +11

Para comparar números enteros, debemos tener en cuenta que:

- Cualquier número entero es mayor que otro que esté situado a su izquierda.

–2 0 +6 +9

+9 es mayor que +6 ⟷ +9 > +6

+6 es mayor que –2 ⟷ +6 > –2

- Cualquier número entero es menor que otro que esté situado a su derecha.

–8 –4 0 +3

–8 es menor que –4 ⟷ –8 < –4

–4 es menor que +3 ⟷ –4 < +3

Actividades

APLICO LO APRENDIDO

1 Ordena los números que faltan en la recta de mayor a menor.

–8 –6 –2 0 +1 +3 +4 +5 +8

2 Copia y sitúa sobre la recta los números comprendidos entre –7 y +5.

0

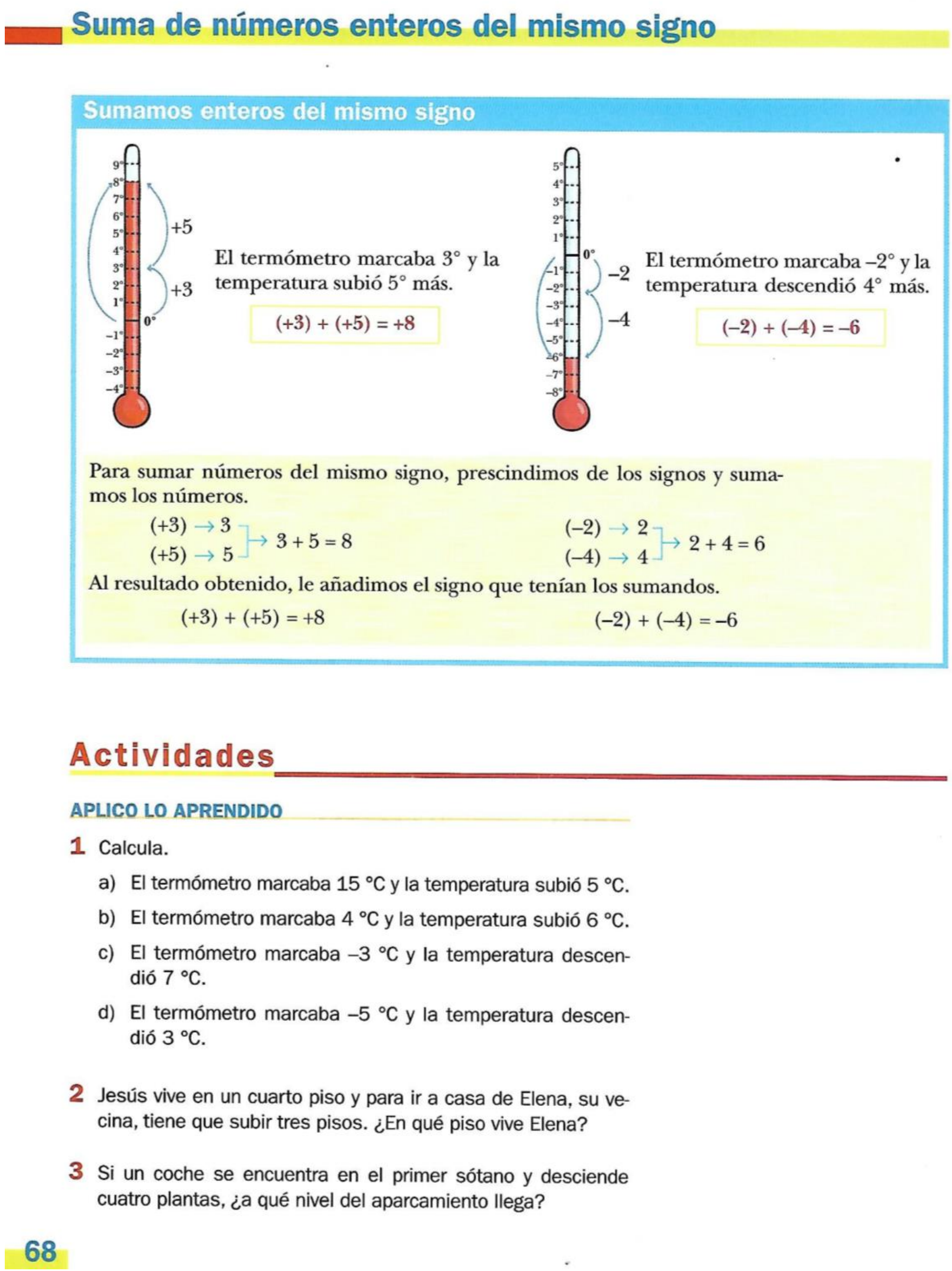
3 Sitúa cada pareja de números sobre una recta numérica y completa con el signo > o <, según corresponda.

+5 ◯ –3   +4 ◯ +6   –2 ◯ –8   +7 ◯ –1

Ten en cuenta

El cero no tiene signo. No es ni positivo ni negativo.

Figura 3.3.6. Libro de ‘‘Matemáticas’’ de la editorial Anaya de 2009 (pp. 66)



Suma de números enteros del mismo signo

Sumamos enteros del mismo signo

El termómetro marcaba 3° y la temperatura subió 5° más.

(+3) + (+5) = +8

El termómetro marcaba –2° y la temperatura descendió 4° más.

(–2) + (–4) = –6

Para sumar números del mismo signo, prescindimos de los signos y sumamos los números.

(+3) → 3, (+5) → 5 → 3 + 5 = 8

(–2) → 2, (–4) → 4 → 2 + 4 = 6

Al resultado obtenido, le añadimos el signo que tenían los sumandos.

(+3) + (+5) = +8 (–2) + (–4) = –6

Actividades

APLICO LO APRENDIDO

1 Calcula.

a) El termómetro marcaba 15 °C y la temperatura subió 5 °C.

b) El termómetro marcaba 4 °C y la temperatura subió 6 °C.

c) El termómetro marcaba –3 °C y la temperatura descendió 7 °C.

d) El termómetro marcaba –5 °C y la temperatura descendió 3 °C.

2 Jesús vive en un cuarto piso y para ir a casa de Elena, su vecina, tiene que subir tres pisos. ¿En qué piso vive Elena?

3 Si un coche se encuentra en el primer sótano y desciende cuatro plantas, ¿a qué nivel del aparcamiento llega?

68

Figura 3.3.7. Libro de ‘‘Matemáticas’’ de la editorial Anaya de 2009 (pp. 68)

Como vemos no se trata todavía el producto de números enteros, siguiendo las directrices marcadas en los planes de estudio actuales que como vemos ahora no se ha modificado desde entonces.

Por consiguiente, como podemos observar en el currículo reciente, tan solo se da en el último curso de Primaria una introducción a los números negativos.

En resumen, los planes oficiales refrendan la tendencia de posponer los aspectos que presentan mayores obstáculos para la Educación Secundaria. Trataremos de presentar una propuesta didáctica, que entre otras cosas, incluye una manera de introducir el producto de números enteros que debería resultar asequible para los estudiantes del último año de educación primaria. Según este punto de vista en los contenidos de Educación Primaria debería incluirse alguno de los de la Educación Secundaria.

En el anexo 3 y 4 se adjuntan los currículos tanto de 6º de Educación Primaria como de 1º de Educación Secundaria Obligatoria. En ambos podemos observar la diferencia de contenidos en relación a los números enteros, además de los criterios de evaluación.

4. PROPUESTA DIDÁCTICA

4.1 Planteamiento de la propuesta

El principal obstáculo que hubo de superarse en la concepción histórica del número negativo fue la identificación de número con una cantidad o magnitud. Este concepto no requiere del cero y es el que tiene un niño en la edad de los cursos iniciales de la Educación Primaria. La superación del obstáculo pasó por la concepción del número cero como una referencia y no solamente como ‘‘nada’’. Para justificar el proceder en la didáctica de los números enteros a partir de esta concepción se ha desarrollado la noción de número relativo.

La introducción didáctica basada en la simetrización del semigrupo de los números naturales es menos satisfactoria: por ejemplo en una actividad de una balanza sabemos que para que esté en equilibro, ambos lados deben pesar lo mismo. Pero entonces no estaremos utilizando el cero como algo relativo sino que será una magnitud y caeríamos en el obstáculo de que al ser el cero una cantidad no podría haber algo por debajo de él. Es imposible encontrar algo que pese -1.

Si tomamos un punto de referencia en una recta, gracias a los números relativos consideramos que a la izquierda del origen o cero tendremos números menores a él que serán los negativos y a su derecha los superiores a cero o números positivos. Una temperatura de -2ºC no significa ausencia de calor pues mide más calor que la de -8ºC. Si hubiéramos puesto 0 ºC en -9ºC sabemos que -8ºC pasaría a ser 1ºC y -2ºC pasaría a ser 7ºC, todos los niños entenderán primero que 7es mayor que 1, pero no que -2 es mayor que -8, y esto hay que enseñarlo.

La arbitrariedad del cero en el ejemplo de las temperaturas o en el de las fechas explica que sea preferible trabajar con este tipo de situaciones que con el de las deudas, puesto que tener o deber dinero sí que son dos hechos cualitativamente diferentes. Si solamente necesitamos referirnos al dinero que tenemos o debemos, no es necesario dejar de pensar en un número exclusivamente como magnitud, y no se supera el obstáculo.

Iriarte, M (1990) hace explícitas una serie de concepciones erróneas asociadas que tienen que corregirse con un planteamiento didáctico correcto:

- El número como expresión de cantidad. Tomada de la idea de Descartes que afirmaba que ‘no existen números menores que nada’.
- La suma como aumento. Si consideramos al número como una cantidad, la adición por tanto es añadir una cantidad a otra. Por tanto se arrastra el error de la primera idea.
- La multiplicación como aumento. Una dificultad que se sigue de la segunda cuando se explica la multiplicación a partir de la suma.
- La sustracción como disminución. Se identifica con la acción de quitar, y por tanto atendiendo a una lógica, donde no hay nada no se puede quitar. Por tanto esta idea nos lleva también a la primera de número identificado a una cantidad.
- La división como división natural. Una división es el reparto de objetos, por tanto si no hay algo no se puede repartir.
- El orden entre los negativos es el mismo que el orden natural. Los naturales aumentan según se van alejando del origen así que se piensa que con los negativos es igual. Véase el ejemplo anterior de las temperaturas.
- Identificación de los símbolos literales con números positivos. En una expresión como –b se tiende a asumir implícitamente que b es un número positivo y por tanto que –b es negativo, siendo que suceda al contrario que b vale por ejemplo -3. La superación de esta dificultad requiere un nivel de abstracción mayor y su importancia es mayor a partir de la enseñanza secundaria.

En relación al producto para nosotros hay una cuestión previa que pasa por alto M. Iriarte, y que es crucial en nuestra propuesta y remite a la misma noción de multiplicación: el producto en función de la suma se explica siempre multiplicando alguna cosa que hemos medido por un número de veces (Si tres niños tienen cuatro manzanas, entre los tres tienen doce manzanas) y puede explicar el producto de un número positivo por otro negativo si el número positivo es el número de veces (Si los tres niños deben cuatro euros, entre los tres deben doce euros). Pero un número de veces no puede ser negativo. Por otro lado los niños ya han calculado áreas de rectángulos y saben que un rectángulo que tiene 7 metros de lado y 5 de alto tiene un área de 35 metros. De esta manera los niños ya se han enfrentado con anterioridad a dos interpretaciones distintas del producto de dos números. Para que una programación didáctica sea completa hay que presentar alguna situación en la que tenga significado el producto de dos valores que pueden ser cada uno positivo o negativo.

4.2 Desarrollo

Se propone una introducción de los números negativos y con ellos de los números enteros progresiva que comienza como es habitual con la presentación de ejemplos cercanos en la vida cotidiana. Es conveniente como ya hemos sugerido que sean situaciones en las que el valor del cero tenga un carácter relativo o de referencia. La recta numérica será la herramienta visual de representación común en la que deben saber plasmar todas estas situaciones (véase figura 4.2.1).

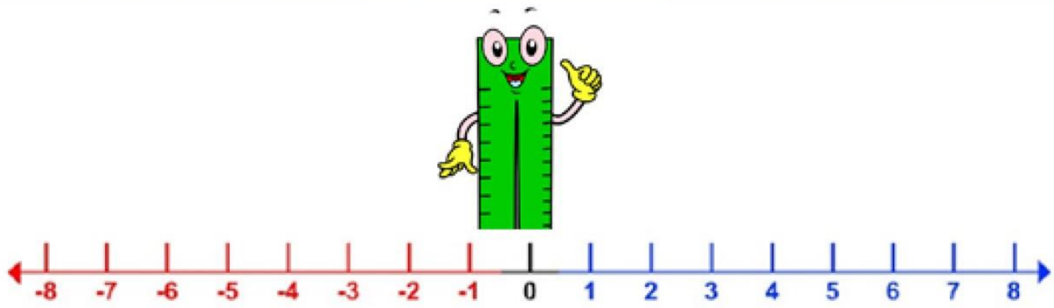


Figura 4.2.1

Posteriormente la operación de adición (suma y resta) tiene que presentarse adecuadamente como ampliación de las operaciones que ya conocen con números naturales. La noción de suma debe ser visualizada en la recta real como una traslación. Pero además es conveniente que aprendan a visualizarla como un cambio de referencia, desplazando el cero. Un cambio de referencia similar permite más adelante entender el producto en la recta numérica de manera que se explique la regla de los signos. Una vez se ha comprendido lo que significa la suma hay que desarrollar la capacidad simbólica de expresión y manejo de sumas de expresiones complejas incluyendo el uso de paréntesis de manera similar a como se hace en los libros de texto habituales. Nuestra propuesta culminaría con la presentación del producto, comenzando con una revisión de la idea que ya tienen de multiplicar números naturales. El hecho de que pueda hacerse de forma paralela a lo visto para la suma prepararía mejor a los alumnos para poder estudiar en secundaria los problemas con números reales y más tarde complejos. Vamos a presentar ejercicios en los que pretendemos desarrollar lo anterior en cuatro etapas sin precisar cuántas horas de clase serían necesarias para cada una de ellas.

Primera etapa

Una situación que los alumnos van a entender bien y a la que ya hemos aludido anteriormente es la de la temperatura, siendo que además los termómetros analógicos ya constituyen en sí mismos una representación de la recta numérica.

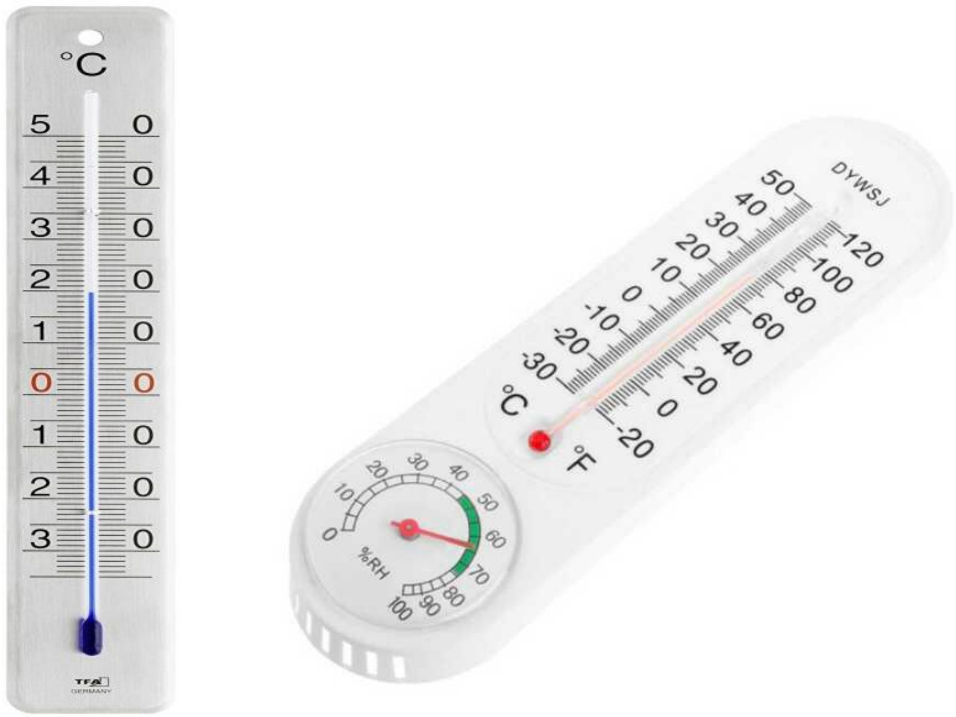


Figura 4.2.2.

En la figura 4.2.2 podemos observar la imagen de dos termómetros diferentes, en el primero se puede observar que no hay números negativos, el fabricante simplemente esperará que el usuario los lea bajo cero.

Se puede apreciar adecuadamente un segundo ejemplo del número como algo relativo en el golf. Se toma como referencia el cero que sería el par, es decir, el número mínimo de golpes que se estima que haría en promedio un golfista profesional. Si en una tirada se queda por debajo de ese número de golpes, (si estaba pactado en 4 y se mete la pelota en el hoyo en 3), se contará como -1. En cambio si se mete la bola en 5 golpes, se apuntará el golfista +1. Por tanto vemos como el que tiene resultado un número negativo va por delante del que tiene un resultado positivo. Aquí es donde se aprecia que el cero es tan solo una referencia, es decir, el par y luego a partir de ahí nos moveremos en una dirección u en otra. Vamos a mostrar 3 ejemplos de 3 jugadores de golf y quién ha quedado en cabeza en la siguiente tabla:

	Hoyo 1	Hoyo 2	Hoyo 3	Hoyo 4	Total
Jugador A	Par	-1	Par	+4	+3
Jugador B	-1	Par	+1	+1	+1
Jugador C	+2	-1	-1	Par	Par

Vemos que en este caso el cero no es un número que signifique cantidad sino que es una referencia hacia lo que un golfista profesional hubiese realizado en ese hoyo.

En este ejemplo se mostraría a los alumnos de Educación Primaria que el obstáculo histórico de mostrar el cero como ausencia de cantidad, lo estuviéramos superando. La primera etapa consiste en una introducción a los números enteros, el ver con objetos y ejemplos de la vida cotidiana lo que significan éstos para que les pueda beneficiar en la siguiente etapa donde mostraremos la adición.

Segunda etapa

En la segunda etapa se introducirá la adición de números enteros. En ella hemos empleado regletas para la explicación prevista. En este caso vamos a utilizar regletas rojas para representar números negativos y regletas azules para los números positivos. Para la operación 4-6 = -2, lo que necesitamos entonces es una regleta de 4 unidades azul y otra regleta de 6 unidades roja, al poner la azul sobre la roja vemos que la roja es dos unidades mayor , por tanto nos quedarían 2 unidades rojas que significa que es el número -2. Una actividad así se utilizará únicamente en la introducción de la adición de números enteros, antes de llevar al error de ver los enteros positivos y negativos diferentes.

A continuación trabajaremos una actividad análoga a la anterior. En esta situación no vamos a separar los números en negativos o positivos sino que tomaremos una referencia que será el cero. Serán necesarias regletas similares a las de la figura 4.2.3.

Figura 4.2.3

La regleta que tenga origen en el cero y esté orientada hacia la derecha tendrá valor positivo, al contrario la regleta que esté colocada en cero y orientada hacia la izquierda tendrá valor negativo. Si ponemos una regleta de valor 6 unidades hacia la izquierda y otra de valor 3 unidades que comience en el final de la de 6, el alumno se dará cuenta de que el final de la regleta de 3 unidades se sitúa en -3. Por tanto el alumno visualiza que el resultado de la operación -6+3 o 3-6 será igual a -3.

Posteriormente se contará con una segunda regla numérica distinta a la primera sesión donde los números enteros positivos y negativos están en el mismo color para que no lleve a errores (véase figura 4.2.4).

Figura 4.2.4

Se explicará a los niños que sumar consiste en desplazarse en la recta, por ejemplo

(-3) + 5,

si nos encontramos 3 lugares a la izquierda del número cero y nos movemos 5 veces a la derecha, llegaremos al número 2 que es la solución a esta operación. Para sumar

(-3) + (-5),

ahora pondremos la referencia en el -3 y como el segundo número es también negativo eso quiere decir que nos moveríamos 5 lugares a la izquierda para llegar al -8. También podría ejecutarse este método con dos números positivos. En la figura 4.2.5 vemos el planteamiento de este método con más ejemplos. También vemos la actividad que se plantea para su resolución en el aula.

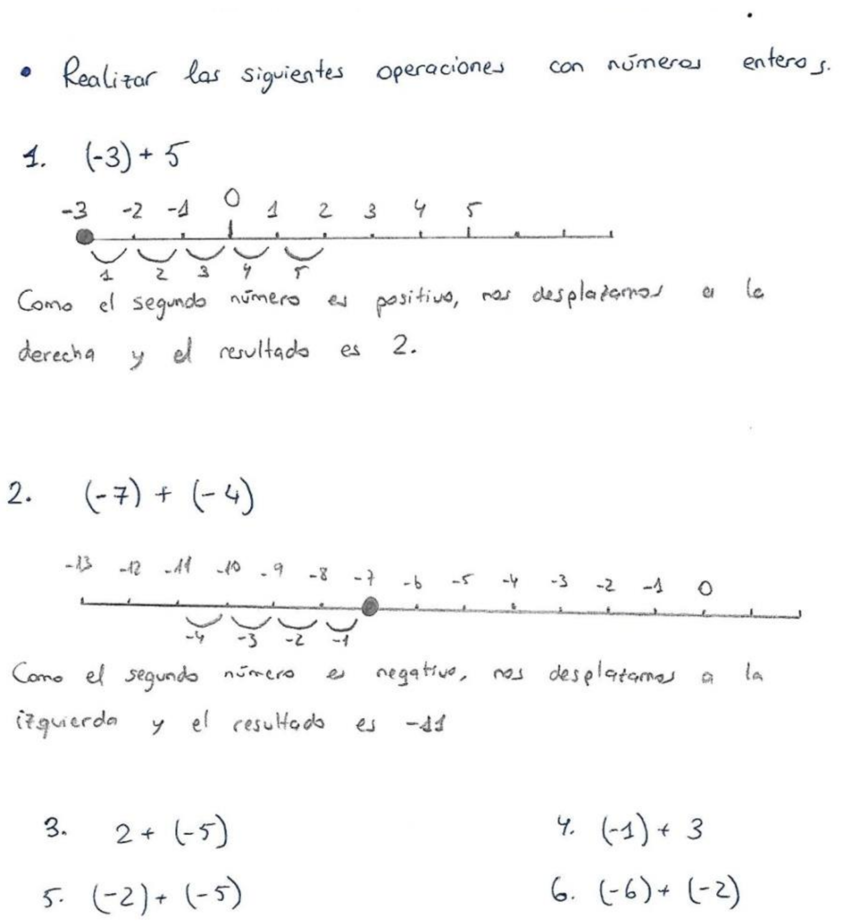


Figura 4.2.5

Enseñaremos otra forma de visualizar la adición consiste en cambiar la situación del cero fijándolo en uno de los dos sumandos. Para ello dibujaremos otra recta numérica debajo de la primera pero poniendo el cero en uno de los dos sumandos. Por ejemplo:

5 + (-2)

Pondremos el cero debajo del 5, en la segunda recta marcamos el segundo sumando que es el -2, entonces en la primera recta nos marca que es el 3 por tanto es el resultado. En la figura 4.2.6 se muestran más ejemplos de adición con este método, el segundo ejemplo muestra que se pueden realizar operaciones de más sumandos con ambos métodos si vamos paso por paso.

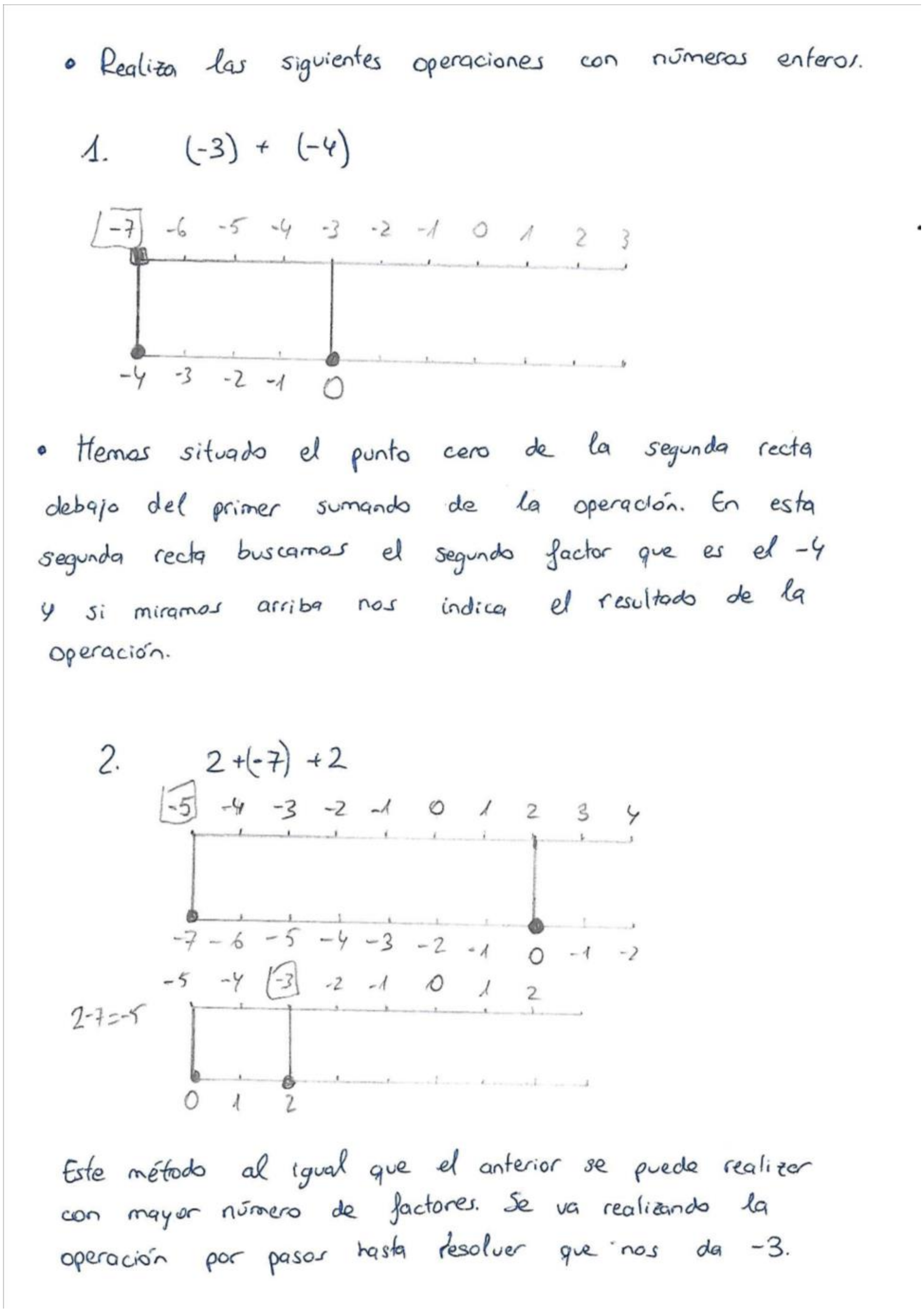


Figura 4.2.6.

Proponemos varios juegos de cartas donde se utiliza la adición de números enteros:

Juego de los seises. Se trata de un juego de cartas donde participan varios jugadores con el objetivo de quedarse lo antes posible sin cartas. Se empieza por el 6 de oros y a partir de ahí se va poniendo tanto de forma ascendente (6,7, sota, caballo y rey) como de forma descendente (6, 5, 4, 3, 1) Una vez que un participante se ha quedado sin cartas, ha ganado y tiene que sumar 5 más el número de cartas de sus rivales. Los rivales deberán restar a lo que tenían las cartas con las que se han quedado. El objetivo es llegar a una puntuación fijada. Visualizamos el uso de los números negativos al empezar la partida, por ejemplo, un participante se queda la primera ronda con 4 cartas, entonces deberá restar a 0 que era lo que tenía esas 4 (0-4 = -4). Podríamos utilizar nuestro segundo método para realizar la operación, es decir, si yo me encuentro en el 0 tengo que recorrer 4 lugares a la izquierda y llegaré al -4. Para ello cada alumno contará con su recta numérica realizada en la primera sesión por ellos mismos.

Seguimos con dos juegos planteados por Ortiz, A. (1990) que son bastante conocidos y que utilizan la adición de números enteros:

'Suma cero' consiste en un juego de cartas creadas por el que organiza el juego. Consta de 41 cartas que van desde -20 hasta +20. Se juega entre 3 o 4 jugadores. Consiste en repartir el total de las cartas entre los jugadores excepto 4 cartas elegidas al azar que se quedarán hacia arriba en mitad del tablero. Cuando a un jugador le llega su turno, deberá echar una carta en la mesa e intentar que entre el resultado del número de la carta que hay en mitad del tablero y el número de su carta, deberá dar 0. Por ejemplo si hay una carta en la mesa de -16 y nosotros tenemos el +16. Se pueden coger más cartas de la mesa, por ejemplo si hay una carta de -2, otra de -3 y otra de -4, si tenemos una de +9 nos llevaremos las 4 cartas. Evidentemente esto puntúa mejor ya que sumamos más cartas a nuestro montón. Si llega tu turno y no tienes una carta que pueda hacer 0 con otra de la mesa, deberás echar una carta a la mesa, así hasta descartarse. Ganará el jugador que más cartas sume en su montón, por número y no fijándonos en el número de la carta, es decir, suma lo mismo la carta de -20 que la de +20.

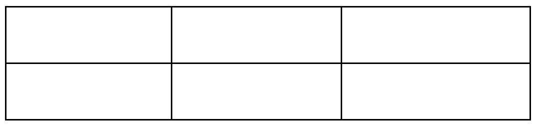
'Siete y media relativa' es similar al juego anterior, con el mismo material y para el mismo número de jugadores. Consiste en acercarse lo más posible a cero, mediante la suma de los puntos de las cartas, que una a una y hasta un total de siete se irán entregando a los jugadores. Cada jugador podrá plantarse, cuando lo estime oportuno.

El primer juego, sirve para reforzar la adición de números enteros en primaria que es uno de los obstáculos que se han encontrado a lo largo de la historia. En este caso el 0 es una meta vuelve a significar una situación y no una magnitud nula, también podemos considerar al 0 como el origen al que debemos volver moviéndonos durante el juego a un lado u otro.

La segunda etapa se completaría con un buen número de ejercicios de simbolización de sumas complejas. Para enseñar adecuadamente por ejemplo el uso de los paréntesis.

Tercera etapa

En la tercera etapa introducimos del producto de números enteros. Con una breve introducción geométrica, recordaremos en primer lugar la idea que tienen los alumnos de los números naturales:



Los alumnos saben que esta figura visualiza que 3x2 es 6 porque estamos poniendo el 3 dos veces (dos filas de tres casillas, una sobre la otra). Una vez introducida la recta numérica visualizamos la operación poniendo el tres dos veces o repitiendo el tres dos veces, una a la derecha de la otra (tal y como hemos visto en la primera interpretación de la suma). Si en lugar de multiplicar por dos multiplicáramos por cinco, desplazaríamos el primer factor cinco veces. Vemos otros ejemplos en la figura 4.2.7.

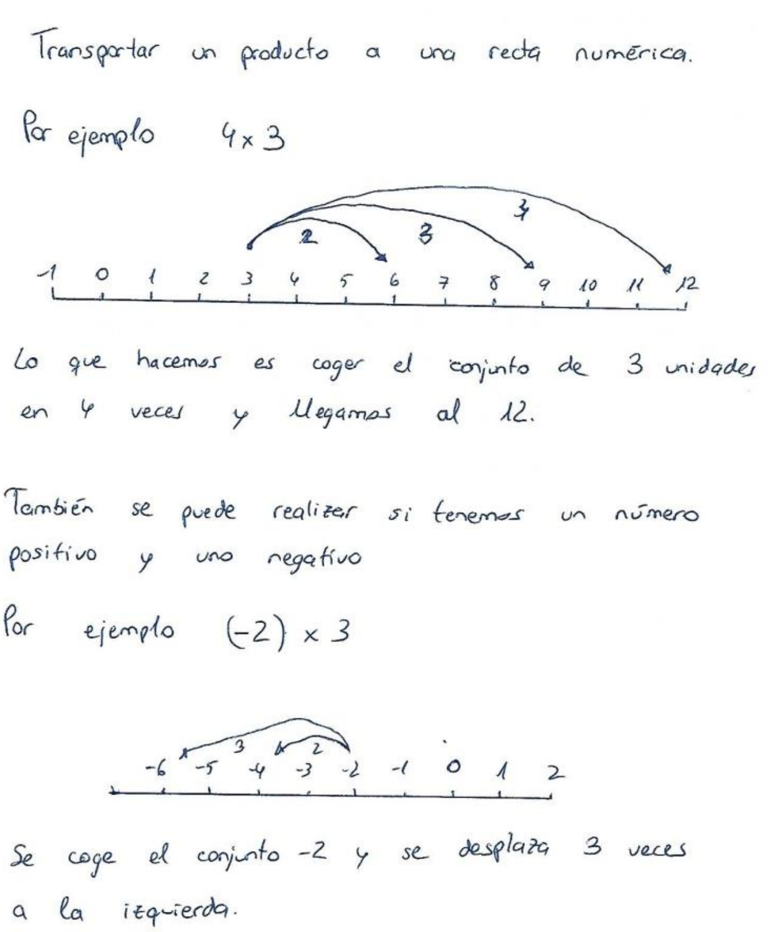


Figura 4.2.7

Si nos quedamos con esta interpretación del producto, es muy difícil justificar la regla de los signos que es uno de los obstáculos más recurrentes a los que se aluden acerca de operaciones con números negativos. Para ello será de gran ayuda dar una interpretación al producto similar a la de la suma.

Debajo de la recta numérica ponemos una segunda recta de manera que los dos ceros queden alineados en vertical, pero situamos el uno debajo del primer factor. Para marcar todos los números en esta segunda recta tenemos que respetar la nueva situación de uno respecto a cero. Si marcamos en esta segunda recta el segundo factor, el número que tiene sobre él en la primera recta es el resultado del producto.

Para más ejemplos de este método véase la figura 4.2.8.

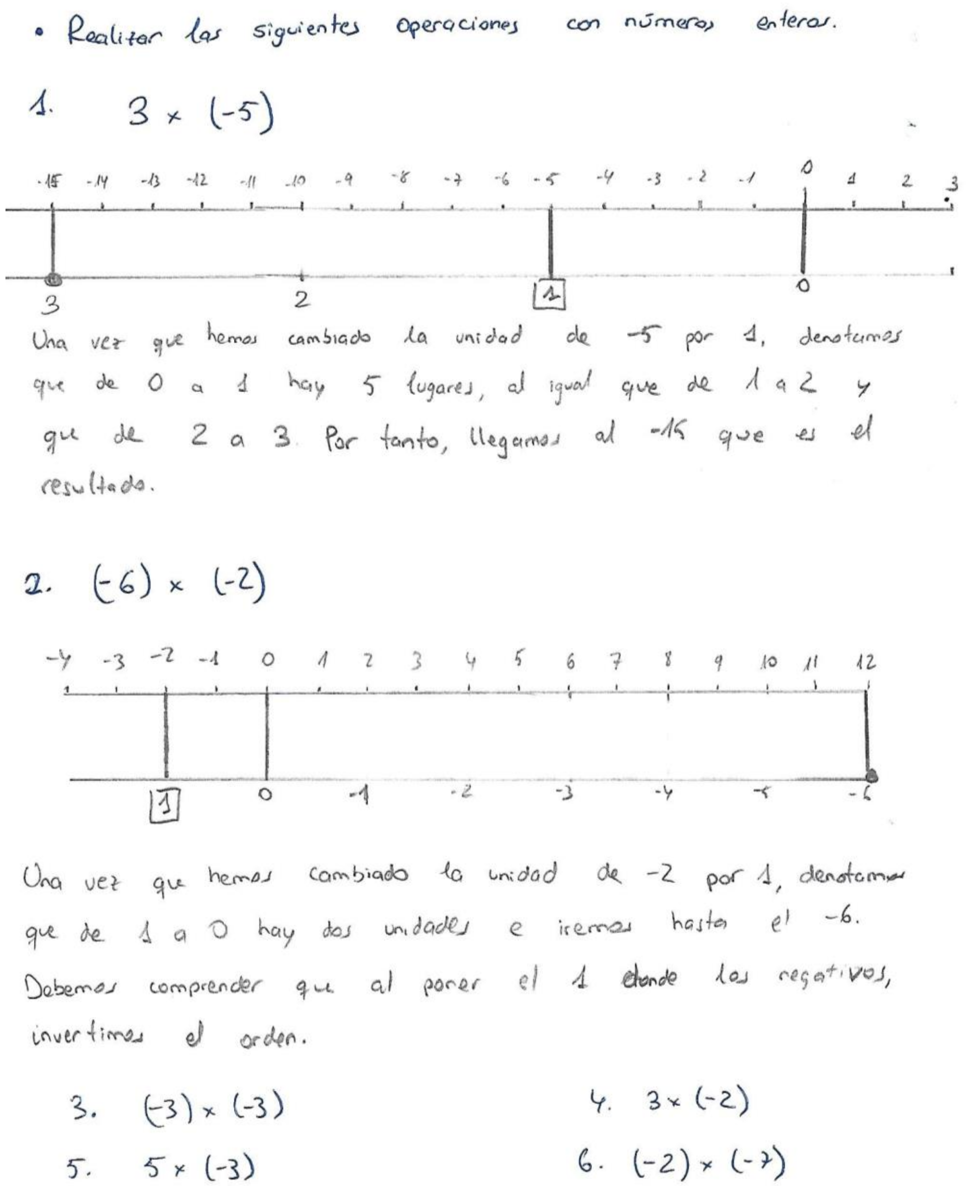


Figura 4.2.8

En sucesivos ejemplos los alumnos deberían casi descubrir las propiedades del producto (conmutativa y asociativa) en relación con esta interpretación.

Como hemos hecho en la segunda etapa, proponemos una serie de juegos para trabajar el producto en el aula de forma lúdica. En cada una de las actividades que realizamos, el producto puede visualizarse mediante la interpretación anterior.

Se propone una actividad para explicar el producto por medio de una recta. Para esta actividad serán necesarias las regletas Cuisenaire dado que cada color tiene un valor distinto desde 1 unidad hasta 10, también necesitaremos tener una recta de referencia para poder colocar las regletas. Se tiene que realizar la operación -3 x 4 en esta actividad: Donde tenemos el -3 en la recta ponemos el 1 y tenemos que buscar dónde pondríamos el 4. El 1 lo hemos colocado donde teníamos el -3, el 2 donde teníamos el -6, el 3 donde teníamos el -9 y el 4 en el -12. Lo que hemos hecho para hacerlo más visual es colocar a la izquierda del 0, cuatro regletas de tamaño 3 unidades y en total nos salen 4 regletas de 3 unidades que sería 12 pero como estamos a la izquierda del 0 por tanto el resultado será -12.

Vamos a interpretarlo ahora con dos negativos. La operación es (-3) x (-4): volvemos a poner en la recta el 1 donde encontramos el -3, como ahora tenemos que buscar el -4 en lugar del 4, tenemos que ir hacia el sentido de la derecha. Iremos con la regleta de 3 unidades colocando en busca del -4, hemos colocado la primera regleta de 1 a 0, la segunda de 0 a -1, la tercera de -1 a -2, la cuarta de -2 a -3 y la quinta de -3 a -4. Como nos encontrábamos en el 1 que era valor igual a -3, hasta llegar a -4 hemos colocado 5 regletas de valor 3 que serían 15 unidades, por tanto ahora se puede hacer de dos maneras, una sería 3 – 15 = -12 y la otra la tendríamos de manera visual ya que colocando las regletas hemos llegado ya al -12 en la recta real que sería el -4 que hemos buscado.

Para que les sea más sencillo a los alumnos la comprensión del producto de números enteros, al igual que con la sustracción realizaremos varios juegos:

Juego inventado. Este juego es muy similar a la morra, un juego tradicional que se juega con las manos y consiste en marcar un número con los dedos y operar con los que saquen todos los jugadores. Lo hemos adaptado a producto de números negativos, con las reglas son las siguientes: juegan un mínimo de tres jugadores. En la mano izquierda tan sólo se podrá sacar un dedo o dos, si se saca un dedo quiere decir que el número que luego saquemos en la mano derecha será negativo y si se sacan dos dedos que será positivo, es decir, con la mano derecha sacamos el valor absoluto del número. En la mano derecha se puede sacar un dedo, dos, tres. Se acuerda quién empieza de los jugadores y ese será el que empiece a sumar o restar en su casillero. El objetivo es llegar a -30 (en un intento de dar valor a los números negativos). Cuando es su turno, cada jugador suma a su puntuación anterior el producto de lo que sacan los tres jugadores Lo que saquen los 3 jugadores se multiplica (ejemplo: (-1)x(-2)x 3 = 6), en la segunda ronda si ese jugador saca -9 se suma a lo que llevaba en la primera por tanto 6 + (-9) = -3.

Tute subastado. Es un juego de cartas donde se utilizan las sumas y restas de números enteros y también el producto de ellos. Consiste en una variante del tute donde se reparten 36 cartas entre 3 jugadores, hay que seguir la baza del que saca la primera carta y si no se tiene es obligatorio echar triunfo. El triunfo es el palo al que se va, el que decide esto es el que apuesta. Es decir, es similar al tute donde el as es la carta más alta, después el tres, posteriormente el rey, el caballo, la sota, siete, seis, cinco y cuatro. El as vale 11, el tres vale 10, el rey vale 4, el caballo 3, la sota dos y el resto nada. Una vez que termina la ronda, si el que ha apostado por ejemplo 60 llega o lo supera así sumará en su casillero 60 + 60 y sus rivales -60. Si este no llega a 60 entonces restará dos veces 60, es decir emplearemos los números negativos para restar –(60+60), los rivales sumarán en su casillero 60. Esto ocurre con todas las apuestas hasta 115, cuando se apuesta 120 o más es diferente a la hora de contar y es donde se utilizará el producto de números enteros. Si el que apuesta 120 llega a esa cifra o la supera, sumará 2 x (120 + 120) es decir, 480, sus rivales restarán, por tanto se haría -2 x 120 = -240. Si el que ha apostado 120 no llega a la cifra, restará, por tanto -2 x (120 + 120) y sus rivales sumarán 2 x 120.

Cuarta etapa

En esta última etapa se realizará primero unos ejercicios de simbolización que mezclen el producto y la adición. Podría culminar con una actividad como la que sigue, en la que los desplazamientos que hacemos en la recta (como interpretación de la suma) son el resultado de un producto de dos factores que pueden ser cada uno positivo o negativo:

El objetivo es reforzar el entendimiento de la regla de los signos.

Se le presta a un alumno una ficha que deberá ir moviendo en la recta en turnos sucesivos. En Cada turno el movimiento lo marca un número elegido por el docente si es positivo el desplazamiento es hacia la derecha y si es negativo hacia la izquierda. Entonces el profesor pregunta al alumno, conocida la situación en un turno dado, por la situación de la ficha en un turno de número diferente.

Si la ficha la movemos diez unidades a la derecha en cada turno, ¿dónde estábamos hace seis turnos?

Sol: 10 x (-6) = -60, por tanto la ficha estará 60 unidades a la izquierda. Si nos movemos hacia la derecha antes estábamos a la izquierda (más por menos es menos)

La ficha se encuentra en 10, en cada turno se mueve -3 (3 a la izquierda), ¿dónde estaba dos turnos antes?

Sol: 10 + (-2 x -3) = 16, es decir, la ficha estaba en 16, 6 a la derecha de donde está ahora.

Si nos movemos hacia la izquierda antes estábamos a la derecha (menos por menos es más)

Si nos movemos hacia la derecha después estaremos a la derecha (más por más es más)

Si nos movemos hacia la izquierda, después estaremos a la izquierda (más por menos es menos)

Con esta última actividad se trata de explicar la regla de los signos a través del producto de dos números en el que ninguno de ellos expresa un número de veces (no multiplicamos veces por cosas sino cosas por cosas). Pero dado que en el currículo oficial de 6º de Educación Primaria no encontramos la cinemática, se hace una introducción con una actividad muy simple. Esta actividad les ayudará a comprender mejor la cinemática en un futuro en segundo de la Educación Secundaria Obligatoria que es en el lugar que se estudia por primera vez esto en física.

5. CONCLUSIÓN

En el presente trabajo hemos presentado una propuesta de introducción de los números enteros y su papel en operaciones aritméticas básicas, tratando de que sea intuitiva para los alumnos de Educación Primaria a partir de la visualización en la recta numérica usual, pero a la vez muy ambiciosa porque pretende avanzar conceptualmente más rápido que lo que dicta el Currículo Oficial en este momento. Concretamente se introducen dos interpretaciones paralelas de la suma y el producto tratando de hacer más clara a una edad tan temprana la explicación de la regla de los signos, para lo que nos adelantamos a la introducción de la multiplicación, que según los planes de estudio actuales se da en Educación Secundaria. Pensamos que si asimilan adecuadamente esta interpretación les será además de gran ayuda a la hora de abordar cuestiones numéricas más complicadas con números reales o complejos. Conocer los números enteros mediante la práctica con actividades lúdicas como pueden ser juegos de cartas o con regletas que proporciona el docente ayuda a los alumnos a estar más motivados en el aula. Nuestra propuesta intenta superar algunas de las dificultades que con más frecuencia se han señalado en la enseñanza de los números enteros. Se introducen ejemplos en los que el cero refleja una situación y no una magnitud nula, y otros en los que tiene un sentido claro el multiplicar dos números negativos Además en algunos de ellos el que un número sea negativo significa una situación mejor que la de ser positivo, corrigiendo el sesgo heredado históricamente de la negación del carácter de número a estos valores. Las dificultades que históricamente han surgido en la compresión adecuada de las operaciones con números negativos se comprenden mejor cuando se aborda el intento de diseñar una propuesta didáctica que resulte atractiva y sencilla para los alumnos, y ha sido enriquecedor porque nos ha obligado a nosotros mismos a comprender conceptos que pretenden hacerse sencillos para los niños pero que han resultado muy complicados para la humanidad.

6. ANEXOS

Índice

5

6

Anexo 1. Índice del libro ‘‘Pitágoras 7 Matemáticas’’ de la editorial SM de 1984

Índice

Anexo 2. Índice del libro ‘‘Matemáticas’’ de la editorial Anaya de 2009

Anexo 3. Currículo de 6º de Educación Primaria de La Rioja según DECRETO 24/2014, DE 13 DE JUNIO

BLOQUE II. Números

- Contenidos

- Números enteros, decimales y fracciones: la numeración romana.
- Orden numérico. Utilización de los números ordinales. Comparación de números.
- Números positivos y negativos
- Operaciones: operaciones con números naturales: adición, sustracción, multiplicación y división.
- Propiedades de las operaciones y relaciones entre ellas utilizando números naturales

-Criterios de evaluación

2. Interpretar diferentes tipos de números según su valor, en situaciones de la vida cotidiana.

3. Realizar operaciones y cálculos numéricos sencillos mediante diferentes procedimientos, incluido el cálculo mental, haciendo referencia implícita a las propiedades de las operaciones, en situaciones de resolución de problemas.

5. Utilizar los números enteros, decimales, fraccionarios y los porcentajes sencillos para interpretar e intercambiar información en contextos de la vida cotidiana.

6.Operar con los números teniendo en cuenta la jerarquía de las operaciones, aplicando las propiedades de las mismas, las estrategias personales y los diferentes procedimientos que se utilizan según la naturaleza del cálculo que se ha de realizar (algoritmos escritos, cálculo mental, tanteo, estimación, calculadora), decidiendo sobre el uso más adecuado.

-Estándares de aprendizaje evaluables

2.2 Lee, escribe y ordena en textos numéricos y de la vida cotidiana, números (naturales de más de seis cifras, enteros, fracciones y decimales hasta las centésimas, las milésimas), utilizando razonamientos apropiados e interpretando el valor de posición de cada una de sus cifras.

2.4 Ordena números naturales, enteros, decimales y fracciones básicas por comparación, representación en la recta numérica y transformación de unos en otros.

5.1 Operar con los números conociendo la jerarquía de las operaciones.

5.2 Utiliza diferentes tipos de números en contextos reales, estableciendo equivalencias entre ellos, identificándolos y utilizándolos como operadores en la interpretación y la resolución de problemas

6.1 Realiza operaciones con números naturales: suma, resta, multiplicación y división

6.5 Aplica las propiedades de las operaciones y las relaciones entre ellas.

6.8 Aplica la jerarquía de las operaciones y los usos del paréntesis.

Anexo 4. Currículo de 1º de Educación Secundaria Obligatoria en La Rioja según la Orden ECI/2220/2007, de 12 de julio**.**

Bloque II. Números

-Contenidos

- Necesidad de los números negativos para expresar estados y cambios. Reconocimiento y conceptualización en contextos reales.
- Significado y usos de las operaciones con números enteros.
- Utilización de la jerarquía y propiedades de las operaciones y de las reglas de uso de los paréntesis en cálculos sencillos.
- Utilización de la calculadora para operar con números enteros.

-Criterios de evaluación

1. Utilizar números naturales y enteros, así como fraccionarios y decimales sencillos, sus operaciones y propiedades para recoger, transformar e intercambiar información. Se trata de evaluar la capacidad para:

Identificar y adquirir destrezas en el empleo de los números y las operaciones siendo consciente de su significado y propiedades.

Aplicar la divisibilidad en la resolución de problemas asociados a situaciones cotidianas.

Transmitir informaciones utilizando los números de manera adecuada.

Desarrollar, en casos sencillos, la competencia en el uso de operaciones combinadas como síntesis de la secuencia de operaciones aritméticas.

2. Resolver problemas para los que se precise la utilización de las cuatro operaciones con números enteros, decimales y fraccionarios, utilizando la forma de cálculo apropiada y valorando la adecuación del resultado al contexto.

Se trata de valorar la capacidad para:

Asignar a las distintas operaciones nuevos significados.

Elegir la forma de cálculo: mental, escrita o con calculadora, más apropiada a cada situación.

Interpretar los resultados obtenidos en los cálculos y comprobar si se adopta la actitud que lleva a no tomar el resultado por bueno sin contrastarlo con la situación de partida.

7. BIBLIOGRAFÍA

Actiludis (2015). Regletas. Recuperado el 10 de junio de 2019 de *https://www.actiludis.com/2015/07/23/uso-de-las-regletas-cuisenaire-en-el-metodo-abn/regletas-4/*

Amazon. Termómetro. Extraído el 26 de junio de 2019 de *https://www.amazon.es/Dostmann-Term%C3%B3metro-an%C3%A1logo-interior-exterior-inoxidable/dp/B07PCZR68N/ref=asc_df_B07PCZR68N/?tag=googshopes-21&linkCode=df0&hvadid=353009251877&hvpos=1o8&hvnetw=g&hvrand=18038358046831918840&hvpone=&hvptwo=&hvqmt=&hvdev=c&hvdvcmdl=&hvlocint=&hvlocphy=1005485&hvtargid=pla-698188068380&psc=1*

Chamorro, C. (2003): *Didáctica de las matemáticas para Primaria*. Pearson Educación, Madrid, 2003.

Cid, E. (2016): *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos.* Zaragoza: Universidad de Zaragoza.

Ebay. Termómetro. Extraído el 26 de junio de 2019 de *https://www.ebay.es/i/401548910921?chn=ps&norover=1&mkevt=1&mkrid=1185-146825-5486-0&mkcid=2&itemid=401548910921&targetid=491376815738&device=c&adtype=pla&googleloc=1005485&poi=&campaignid=1670809413&adgroupid=66166821793&rlsatarget=pla-491376815738&abcId=1139526&merchantid=116373229&gclid=CjwKCAjwr8zoBRA0EiwANmvpYIq3PsFu2j3NRbf70-kumsEaI2naynaarmUeWIvuf6XLOACB7J-SphoCH0MQAvD_BwE*

Equipo pedagógico de Campuseducacion.com (2017): *Revolución metodológica de la enseñanza de las matemáticas.* Recuperado de https://www.campuseducacion.com/blog/recursos/metodo-abn/

Ferrero, L., Gaztelu, I., Martín, P., (2009). *Matemáticas. Primaria. Tercer ciclo.* Madrid: Anaya

Gobierno de la Rioja (2007). *Boletín Oficial del Estado de la Comunidad Autónoma de la Rioja para la Educación Secundaria Obligatoria*. Recuperado de https://www.boe.es/buscar/doc.php?id=BOE-A-2007-14050

Gobierno de la Rioja (2014*). Currículo de la Educación Primaria en la Comunidad Autónoma de la Rioja.* Recuperado de <http://www.larioja.org/educacion/es/normativa-educativa/habitualinformacion/normativa-educacion-primaria>

González, J.L. (1990). Vías de acceso a Z. *Números enteros.* (pp. 83-104). Madrid: Editorial Síntesis.

Iriarte, M.D. (1990). Reflexiones sobre la naturaleza y existencia de los números enteros. *Números enteros.* (pp. 59-82). Madrid: Editorial Síntesis.

Jimeno, M. (1990). Los números negativos y su larga y azarosa historia. *Números enteros.* (pp. 21-58). Madrid: Editorial Síntesis.

Mansilla, S., Bujanda, M.P., (1984). *Pitágoras 7 EGB Matemáticas.* Madrid: SM

Maz, A., Rico, L. (2004): *Concepto de cantidad, número y número negativo durante la época de influencia jesuita en España (1700-1767).* La Coruña. ISBN 84-9749-120-3, págs. 249-258

Maz, A., Rico, L. (2005): *Los números negativos en España en los siglos XVIII y XIX.* Granada: Universidad de Granada.

Ortiz, A. (1990). Métodos formales. *Números enteros.* (pp. 105-122). Madrid: Editorial Síntesis.

Ortiz, A. (1990). Una propuesta didáctica. *Números enteros.* (pp. 167-207). Madrid: Editorial Síntesis.

Ortiz, M.C. Recta numérica. Recuperado el 10 de junio de 2019 de *https://www.geogebra.org/m/zBXUu6RZ*

Piculir. Recta numérica matemáticas tercer grado. Recuperado el 10 de junio de 2019 de *http://piculir.pw/Recta-numrica-Matemticas-Tercer-Grado-t.html*

Real Academia Española. Extraído de *https://dle.rae.es/?id=Fy2OT7b*

Sanz, E. (1990). Obstáculos y concepciones en la enseñanza aprendizaje de los números enteros. *Números enteros (*pp. 123-165). Madrid: Editorial Síntesis.